# 定积分习题课

一、内容与要求

二、典型例题

# 一、内容与要求

1．理解定积分的概念、几何意义、性质。

2．理解变限积分函数的概念，熟练掌握牛顿——莱布尼兹公式

3．熟练掌握定积分的换元与分部积分法

4．熟悉如下的一些结论：（均假设$f(x)$连续）

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以$T$为周期的函数，则：

对任何实数 $a$ ，有 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

(3) $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\ \text{为大于1的正奇数}\end{cases}$$

5 .熟练掌握两类反常积分的定义和计算

## 二、典型例题

1. 利用定积分的定义、几何意义、性质.

例1　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

解

思考：如何计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$　?

注：$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$

例2 设$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx$，求$f(x)$。

解：

例3 设$f(x)$二阶可导，且$f(x)>0$，下列不等式

$$f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

成立的条件是________

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0.$ (B) $f'(x)<0, f''(x)>0.$

(C) $f'(x)>0, f''(x)>0.$ (D) $f'(x)>0, f''(x)<0.$

## 2. 变限积分函数及其应用

### (一).求变限积分函数的导数

例1　设$f(x)$为连续函数，则$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ ________

## (二).与变限积分有关的极限问题

**含有变限积分函数的$\frac{0}{0}$型极限采用洛必达法则**

例2 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$$

## (三).求分段函数的变限积分

例3 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<-1 \\ \dfrac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

## (四).讨论变限积分函数的性质

例4 (1)若$f(x)$连续，则下列函数中必为偶函数的是_____

$(A)\int_0^x f(t^2)dt$ $(B)\int_0^x f^2(t)dt$

$(C)\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$ $(D)\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

例5．设$f(x)$处处连续，$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$

求证:（1）若$f(x)$是偶函数，则$F(x)$也是偶函数；

（2）若$f(x)$单调减少，则$F(x)$单调增加；

**例6.** 求多项式 $f(x)$ 使它满足方程

$$\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t-1)\,\mathrm{d}t = x^3 + 2x$$

**例7.** 求$f(x)=\int_0^1|t-x|\mathrm{d}t$在[0,1]上的最大值和最小值。

**例8.** 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

## 3. 有关定积分、反常积分的计算

### (一). 选择适当的方法计算(变形、换元、分部)

例1： 计算下列积分

$$(1)\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x dx \qquad (2).\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3).\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \qquad (4)\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$$

**例2.** 求$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$ .

## (三).简化定积分的计算的若干方法

例3: 计算下列积分

$$(1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

（2）．求$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(1+x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（3）. 求$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} \mathrm{d}x$

例 4 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy$，求 $\int_0^1 (1-x)^2 f(x)\,dx$ .

## 4. 与定积分有关的证明题

### (一). 零点问题.

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，证明：方程

$$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}=0$$ 在$(a,b)$内有且仅有一个根.

例2　设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，证明$\xi \in (a,b)$使得$f(\xi)\int_{\xi}^{b} g(x)dx = g(\xi)\int_{a}^{\xi} f(x)dx$

例3 设$f(x)$在[0，1]上可微，且有

$$f(1)=2\int_0^{1/2} e^{1-x^2} f(x)dx$$

求证：存在ξ∈(0，1)，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

**例 4.** 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$,

试证至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

## (二). 积分等式的证明

方法一、利用换元法、分部积分证明积分等式.

方法二、构造变上限函数，利用微分法证明积分等式.

例1 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x [\int_0^u f(x)dx]du$

## (三). 积分不等式的证明

方法一、利用积分的估值、不等式性质.

例1 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数，且 $f(a)=0$,证明:

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|dx$$

例2 证明$f(x)=\int_0^x (1-t)\ln(1+nt)dt$在$(0,+\infty)$上的最大值不超过$\dfrac{n}{6}$

方法二：构造变上限函数，利用微分学的知识证明不等式是证明积分不等式的一个很重要的方法。

例1. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geq (b-a)^2$$

例2. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$,

$0 < f'(x) < 1$, 证明 $\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$.